

Олимпиада школьников «Ломоносов»

Заключительный этап 2025/26 учебного года по математике

7–8 классы

Задача 1. В круге радиуса 5 три разных хорды пересекаются в одной точке, причем две из них делятся этой точкой пополам. Какова при этом наименьшая возможная длина третьей хорды?

Ответ: 10

Решение. Точка пересечения — это центр круга, иначе радиус проведенный через эту точку, был бы перпендикулярен к тем двум хордам, а значит, они совпали бы.

Если соединить центр с точкой пересечения, то полученный отрезок будет перпендикулярен обеим хордам (т.к. в равнобедренном треугольнике медиана совпадает с высотой), которые делятся пополам. Значит в этом случае хорды совпали бы — налицо противоречие.

Задача 2. Найдите все четырёхзначные натуральные числа n , обладающие свойством, что первые несколько цифр числа n^2 образуют число n . Если таких чисел несколько, в ответ запишите наименьшее из них, если таких чисел нет, в ответ запишите 0.

Ответ: 1000

Решение. Решим задачу в общем виде: будем искать k -значные числа n . Тогда $10^{k-1} \leq n < 10^k$. Для числа n^2 справедливы неравенства $10^{2k-2} \leq n^2 < 10^{2k}$, то есть n^2 — это $(2k-1)$, или $2k$ -значное число.

Допустим, что n^2 это $2k$ -значное число. Тогда $n^2 \geq n \cdot 10^k$ (мы дописали к k -значному n ещё k чисел. Самый минимальный по значению вариант — приписать k нулей, что значит просто домножить на 10^k). Но тогда получается, что $n \geq 10^k$, это противоречие с тем, что в n всего k цифр.

Значит, n^2 есть $(2k-1)$ -значное число.

Согласно условию выполнено равенство $n^2 = n \cdot 10^{k-1} + m$, где m — $(k-1)$ -значное число. Перепишем последнее равенство в виде $n(n - 10^{k-1}) = m$. Рассмотрим случаи:

1) если $n - 10^{k-1} > 0$, то в последнем равенстве слева стоит по крайней мере k -значное число, а справа — $(k-1)$ -значное, что невозможно;

2) следовательно $n - 10^{k-1} = 0$, т.е. $n = 10^{k-1}$.

Для четырёхзначных чисел ответ: $n = 1000$.

Задача 3. В равенстве $\text{ТУК} \times \text{ТУК} = \text{ФАРТУК}$, записанном в десятичной системе, вместо каждой буквы надо подставить определенную цифру так, чтобы получилось тождество (различным буквам соответствуют различные цифры). Восстановите число, записанное как ФАРТУК.

Ответ: 390625

Решение. Запишем равенство $\text{ТУК} \times \text{ТУК} = \text{ФАРТУК}$ в виде $\text{ТУК} \times \text{ТУК} = \text{ФАР} \cdot 1000 + \text{ТУК}$, откуда $\text{ТУК} \times (\text{ТУК} - 1) = \text{ФАР} \cdot 1000$. Числа ТУК и $\text{ТУК} - 1$ взаимно просты и так как их произведение делится на 1000, то одно из них делится на 125, но не делится на 2, а другое делится на 8, но не делится на 5 (поскольку $1000 = 8 \cdot 125$ это единственное разложение числа 1000 на взаимно простые множители). Среди нечетных трехзначных чисел делятся на 125 только 125, 375, 625 и 875. Среди соседних с ними чисел делятся на 8 только 376 (тогда $\text{ТУК} - 1 = 375$, $\text{ТУК} = 376$) и 624 (тогда $\text{ТУК} - 1 = 624$, $\text{ТУК} = 625$). Так как $376 \times 376 = 141376$, а $625 \times 625 = 390625$, то ответом в первом варианте будет 390625. Во втором варианте ответ 141376.

Задача 4. В неравнобедренном треугольнике ABC медиана AM перпендикулярна биссектрисе BL . Найдите все возможные значения периметра треугольника ABC , если длина стороны AB равна 7, а длины двух других сторон выражаются целыми числами.

Ответ: целые числа от 29 до 34 и от 36 до 41 включительно

Решение. В ABM биссектриса угла B по условию перпендикулярна стороне AM , то есть является одновременно биссектрисой и высотой. Значит, этот треугольник равнобедренный,

$AB = BM = 7$. Тем самым известны две стороны $\triangle ABC$: $AB = 7, BC = 14$. Третья сторона AC может принимать произвольные целые значения, но при этом ABC должен: а) существовать; б) быть неравносторонним. Значит, должны выполняться неравенства: $AC \neq 7, AC \neq 14, BC - AB < AC < AB + BC$. Отсюда $7 < AC < 21, AC \neq 14$. Возможные целые значения AC : 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20. Соответственно возможные значения периметра треугольника: целые числа от 29 до 34 и от 36 до 41 включительно.

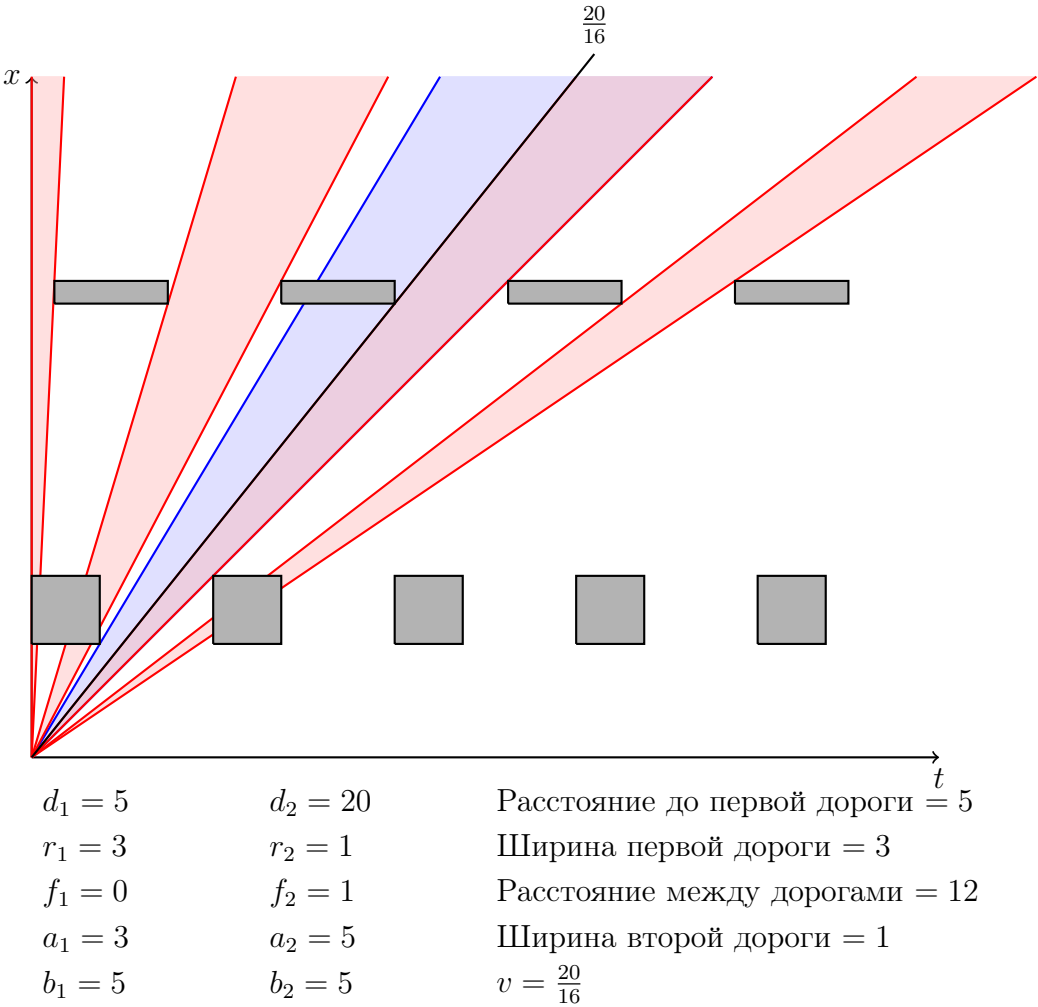
Задача 5. Агриппина гоняет в школу на самокате, по тротуару — но на её пути есть два пешеходных перехода со светофорами. От дома до первого перехода расстояние 50 метров, ширина первого перехода равна 30 метров, потом до следующего перехода ей надо ехать 120 метров, второй переход шириной 10 метров — а там уже и школа.

Светофоры работают так: на первом переходе машинам даётся 30 секунд, пешеходам — 50 секунд, на втором переходе машинам даётся 50 секунд, пешеходам — 50 секунд, а ещё известно, что ровно в момент выхода из дома первый светофор загорается красным (для пешеходов), а через 10 секунд загорится красным светофор на втором переходе.

Агриппина может гнать сколь угодно быстро, и намерена попасть в школу как можно скорее, но ускорения она не любит — девочка выезжает из дому с постоянной скоростью, которую и будет поддерживать на протяжении всего пути, не считаясь с правилами дорожного движения.

С какой наибольшей скоростью она сможет доехать до школы так, чтобы ей ни разу не пришлось проехать на красный, и чтобы светофор не переключился на красный, пока она ещё на зебре?

Ответ: $\frac{5}{4}$ м/с
Решение.



Изобразим происходящее графически (конечно, это не единственный способ решения). Отложим по оси t время, по оси x пройденное расстояние от дома до школы. Полосками прямоугольников обозначим переходы, где серый прямоугольник значит, что соответствующий светофор

горит красным. Высота прямоугольника (r_i) соответствует ширине перехода, а ширина (a_i) — времени, отведённому автомобилям. Горизонтальное расстояние между прямоугольниками (b_i) — это время для пешеходов. Из условия задачи также понятно, как прямоугольники первого перехода сдвинуты относительно второго и относительно оси (параметры f_i). Величины d_i показывают расстояния от дома до нужного перехода. Расстояния и время на иллюстрациях уменьшены в 10 раз, так что итоговая скорость будет такой же.

В такой системе координат поездку Агриппины изобразит прямая, выходящая из $(0, 0)$. Эта прямая не может пересекать как нижние стороны прямоугольников (это бы значило, что Агриппина подъехала к переходу, пока горит красный), так и левые (это бы значило, что зелёный погас, пока она ещё на дороге). Чем круче направлена линия — тем выше скорость. Соответственно, нужно выбрать линию с самым крутым уклоном, которая бы не пересекала прямоугольников.

Синим обозначены скорости, подходящие для преодоления только первого перехода, красным — те скорости, с которыми она бы смогла преодолеть по правилам второй. Соответственно, подходящие нам скорости будут лежать в пересечении синей и красной областей.

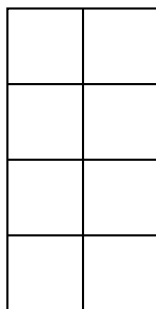
Задача 6. В множество A входят все такие натуральные числа, которые при делении на сумму своих цифр дают целое число, кратное 9 (не обязательно одно и то же для всех этих чисел). Найдите все трехзначные числа, входящие в множество A и, расположив их в порядке возрастания, найдите сумму первого из них, шестого и последнего.

Ответ: 1782

Решение. Обозначим через $S(n)$ сумму цифр числа n . Поскольку $n = 9m \cdot S(n)$, то n кратно 9, а значит, и $S(n)$ тоже кратно 9. Отсюда следует, что n кратно 81. Исходя из этого, а также того, что n трехзначное, n может принимать значения 162, 243, 324, 405, 486, 567, 648, 729, 810, 891 или 972. Если $S(n) = 9$, то условия задачи выполнены, так как $\frac{n}{S(n)}$ кратно 9. Значит, $n = 162, 243, 324, 405$ и 810 подходят. Если $S(n) = 18$, то прямой проверкой убеждаемся, что 486, 648 и 972 подходят, а 567, 729 и 891 нет — они даже не делятся на сумму своих цифр. Таким образом, существует 8 таких трехзначных чисел: 162, 243, 324, 405, 486, 648, 810 и 972. Искомая сумма:

$$162 + 648 + 972 = 81 \cdot (2 + 8 + 12) = 81 \cdot 22 = 1782.$$

Задача 7. Сколькими способами можно разместить восемь из девяти чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 в восьми клетках изображенной фигуры (в каждой клетке одно число, числа не повторяются), чтобы сумма чисел в каждой строке, начиная со второй, была на 1 больше, чем в предыдущей?



Ответ: 64

Решение. Сумма всех девяти чисел равна 45. Обозначим через x сумму двух чисел в первой строке, а через a то единственное из девяти чисел число, которое мы не размещаем в фигуре. Тогда

$$x + x + 1 + x + 2 + x + 3 = 45 - a,$$

откуда $4x + a = 39$.

Так как a — целое число от 1 до 9, то получаем 2 возможных варианта: либо $x = 9, a = 3$, либо $x = 8, a = 7$. Если $a = 3$, то мы должны расставить числа 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, а сумма чисел

в строках должна быть равна соответственно 9, 10, 11 и 12. Возможные варианты для чисел первой строки: $9 = 1 + 8 = 2 + 7 = 4 + 5$. Если в первой строке стоят 1 и 8, то во второй строке должны стоять 4 и 6, в третьей 2 и 9, в последней 5 и 7. Получаем первую расстановку. Если в первой строке стоят 2 и 7, то во второй строке должны стоять 1 и 9 (при других вариантах нельзя подобрать числа для третьей строки), в третьей 5 и 6, в последней 4 и 8. Это вторая расстановка. Если в первой строке стоят 4 и 5, то во второй строке могут быть или 1 и 9, или 2 и 8. Но и в том, и в другом случае числа для третьей строки найти нельзя. Если $a = 7$, то мы должны расставить числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, а сумма чисел в строках должна быть равна соответственно 8, 9, 10 и 11. Сумма чисел в первой строке равна $8 = 5 + 3 = 6 + 2$.

Если в первой строке стоят 3 и 5, то во второй строке должны стоять 1 и 8, в третьей 6 и 4, в последней 2 и 9 – третья расстановка. Если в первой строке стоят 6 и 2, то во второй строке могут стоять или 1 и 8, или 4 и 5. Если там стоят 1 и 8, то невозможно подобрать числа в следующей строке. Значит, там стоят 4 и 5, тогда в следующей строке стоят 1 и 9, а в последней строке 3 и 8. Получаем четвертую расстановку. Таким образом, всего получилось 4 варианта расстановки чисел без учета порядка чисел в строках. Так как в каждой строке числа можно менять местами, получается по $2^4 = 16$ вариантов для каждой расстановки. В итоге получаем $4 \cdot 16 = 64$ варианта.